page 346 1/4 1992

E.S.E.O ... I.S.E.P

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1992

SERIE M

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Vendredi 29 mai 1992 de 8 h à 12 h

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.

Dans ce problème, on se propose d'étudier les endomorphismes continus d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé qui peuvent s'écrire : $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n U^n$, U étant un endomorphisme donné, et (α_n) une suite de réels.

Dans les parties II et III on obtient des conditions suffisantes pour que, dans un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, normé par $\|.\| : f \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |f^{(n)}(0)|$, un endomorphisme puisse s'écrire : $T = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n D^n$, D désignant l'opérateur de dérivation.

La partie IV est consacrée à un exemple : $\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} D^n$.

NOTATIONS : Etant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$, on note $\mathcal{L}_C(E)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des endomorphismes continus de E.

U étant un élément non nul donné de $\mathcal{L}_C(E)$, on note alors :

* $U^0 = I$ (application identique de E), et $U^{n+1} = U^n \circ U$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;

* $\mathbb{R}[U]$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_C(E)$ engendré par la famille $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$;

* $\Gamma(U)$ l'ensemble des éléments V de $\mathcal{L}_C(E)$ vérifiant : $V \circ U = U \circ V$;

* $\Sigma(U)$ l'ensemble des éléments S de $\mathcal{L}_C(E)$ tels qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels pour laquelle, pour tout $x \in E$, la série de terme général $\alpha_n U^n(x)$ converge dans $(E, \|.\|)$ et a pour somme $S(x)$ (on posera dans ce cas : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n U^n$).

PARTIE I : Dans cette partie E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension quelconque, finie ou non) muni d'une norme $\|.\|$ et U est un élément non nul donné de $\mathcal{L}_c(E)$.

1) a) Montrer que $\Gamma(U)$ et $\Sigma(U)$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{L}_c(E)$.

b) Prouver que : $\mathbb{R}[U] \subset \Sigma(U) \subset \Gamma(U)$.

c) Soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n U^n$ un élément de $\Sigma(U)$.

Si x est un vecteur propre de U associé à la valeur propre λ, montrer que :

* S(x) est colinéaire à x (on pourra utiliser, sans le redémontrer, le résultat suivant : toute droite vectorielle de E est un fermé de $(E, \|.\|)$).

* la série de terme général $\alpha_n \lambda^n$ converge et a pour somme une valeur propre de S.

2) Soit V un élément de $\Gamma(U)$. Montrer que, pour tout S de $\Sigma(U)$, on a : $V \circ S = S \circ V$.

3) Soient x un élément de E et $F_x = \{y \in E \ / \ \exists S \in \Sigma(U), \ y = S(x)\}$.

a) Soit W un élément de $\Gamma(U)$ tel que : $W(x) = 0$.
Montrer que : $\forall y \in F_x \quad W(y) = 0$.

b) Soit V un élément de $\Gamma(U)$ tel que : $V(x) \in F_x$. Il existe donc $S \in \Sigma(U)$ tel que $V(x) = S(x)$. Prouver alors que V et S coïncident sur F_x.

Dans toute <u>la suite du problème</u>, E est l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe une suite <u>bornée</u> $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels pour laquelle :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

PARTIE II : Etant donné $f \in E$, on pose $f^{(0)} = f$, et pour $p \geqslant 1$, $f^{(p)}$ désigne la dérivée p-ième de f.

1) a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Prouver que tout élément de f de E est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que la suite $(f^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

2) Pour $f \in E$ on pose : $\|f\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f^{(n)}(0)|$.
Vérifier que $\|.\|$ est une norme de E.
Désormais le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est muni de cette norme.

3) Soit $f \in E$. Montrer que : $\forall (t,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \quad |f^{(p)}(t)| \leqslant e^{|t|}\,\|f\|$.

4) Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme continu de E.

5) Soit g une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que :

* la suite $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

* $\forall (t,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, la suite $\left(f_n^{(p)}(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g^{(p)}(t)$.

a) Montrer que : $\forall a > 0$ il existe $M_a \geqslant 0$ tel que :

$$\forall t \in [-a,a] \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad |g^{(p)}(t)| \leqslant M_a .$$

b) Prouver que g appartient à E.

6) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que la série de terme général α_n converge absolument.

a) Soit $f \in E$. Montrer que :

* $\forall t \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\alpha_n f^{(n)}(t)$ converge

* pour tout (a,p) fixé dans $]0,+\infty[\times \mathbb{N}$, la série de fonctions de terme général $\alpha_n f^{(n+p)}$ converge normalement sur $[-a,a]$.

b) Pour $f \in E$ on note S(f) l'application définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad S(f)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n f^{(n)}(t).$$

Montrer que S(f) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, puis en utilisant le 5), que S(f) appartient à E.

c) Montrer que, pour tout f de E, la série de terme général $\alpha_n f^{(n)}$ converge dans $(E,\|.\|)$ et a pour somme S(f).
En déduire que l'application $S : f \mapsto S(f)$ appartient à $\Sigma(D)$.

T.s.v.p.

PARTIE III : On considère la suite d'applications $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définies par : $\forall t \in \mathbb{R}\ \ \varepsilon_0(t) = 1$ et $\varepsilon_m(t) = \dfrac{t^m}{m!}$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

1) a) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, ε_m appartient à E et déterminer $D^n(\varepsilon_m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soient $m \in \mathbb{N}$ et $F_m = \{h \in E / \exists\ S \in \Sigma(D),\ h = S(\varepsilon_m)\}$.
Montrer que F_m est le sous espace vectoriel de E admettant pour base la famille $(\varepsilon_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$.

2) Soit T un élément de $\Gamma(D)$ tel que : $\forall m \in \mathbb{N},\ T(\varepsilon_m) \in F_m$.
Prouver qu'il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}$: $T(\varepsilon_m) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k\ \varepsilon_{m-k}$ (on pourra construire cette suite par récurrence et utiliser I.3).

3) On suppose de plus que la série de terme général α_n est absolument convergente, et que, pour tout $f \in E$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}\quad T(f)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0)\ T(\varepsilon_n)(t).$$

a) Soient $f \in E$ et $S(f) : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\ f^{(n)}(t)$.
Déterminer $\|T(f) - S(f)\|$.

b) En déduire que T appartient à $\Sigma(D)$ et que : $T = \sum_{n=0}^{+\infty} T(\varepsilon_n)(0)\ D^n$.

Partie IV :

1) a) Soit $f \in E$.
Montrer que : * $\forall t \in \mathbb{R}\ \ f(t+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}\ t^n$

* l'application $T(f) : t \mapsto f(t+1)$ appartient à E.

b) Vérifier que les applications $T : f \mapsto T(f)$ et $\Delta = T - I$ appartiennent à $\Gamma(D)$.

2) a) Montrer que : $\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} D^n$.

b) En déduire qu'à toute valeur propre de l'endomorphisme D de E correspond une valeur propre de Δ.

c) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de D en précisant les vecteurs propres associés. Retrouver alors le résultat du b).
